Лабораторная работа № 7

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Цель работы

Исследование влияния параметров линейных систем на вид фазового портрета и тип особых точек.

2. Основные сведения

Метод фазовой плоскости используется для исследования поведения линейных и нелинейных систем второго порядка.

Модель линейной системы второго порядка в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_0 \cdot x_1 - a_1 \cdot x_2 + b \cdot u, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

где $x_1,\ x_2$ -координаты состояния; u-входной сигнал; a_i - постоянные коэффициенты. Плоскость с координатами x_1 и x_2, характеризующими поведение системы, называется фазовой плоскостью. Траектория движения изображающей точки на фазовой плоскости называется фазовой траекторией. Уравнение фазовой траектории можно получить из уравнения (7.1), если исключить время

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -a_1 - a_0 \cdot \frac{x_1}{x_2} + b \cdot \frac{u}{x_2} \quad , \qquad (7.2)$$

а переменную x_1 рассматривать в качестве независимой переменной.

Фазовые траектории строятся при различных начальных условиях по x_1 и x_2, входное воздействие полагается равным нулю или некоторой константе. Совокупность фазовых траекторий, заполняющая всю фазовую плоскость, называется фазовым портретом. Построение фазового портрета осуществляется, как правило, тремя способами: аналитическим методом (находится решение дифференциального уравнения (7.2)), методом изоклин и с помощью машинного моделирования.

На фазовых портретах выделяют особые точки или точки равновесия системы, в которых не существует определенного направления касательной к фазовой траектории, т.е. $dx_2/dx_1 = 0/0$. В особых точках фазовые траектории пересекаются друг с другом. Фазовые траектории сходятся к особым точкам или выходят из них.

Тип особой точки зависит от устойчивости, т.е. определяется корнями характеристического уравнения. Сходящийся (расходящийся) процесс имеет на фазовой плоскости особую точку типа «устойчивый (соответственно неустойчивый) узел», если корни характеристического уравнения действительные отрицательные (положительные). Расходящемуся процессу будет соответствовать точка типа «седло», если действительные корни характеристического уравнения имеют разные знаки. Колебательному сходящемуся (расходящемуся) процессу соответствует особая точка типа «устойчивый (неустойчивый) фокус». Если фазовые траектории имеют вид замкнутых кривых, вложенных друг в друга и охватывающих особую точку, то эта особая точка называется центром.

Фазовую траекторию можно развернуть во времени, получив вид переходного процесса. Значение выходной переменной в i-й момент времени определяется по абсциссе изображающей точки. Фиксируя два момента времени i-й и j-й, которым соответствуют значения координат состояния (x_{1i}, x_{2i}) и (x_{1j}, x_{2j}), оценивают величину интервала $\Delta t=t_j - t_i$. Изображая на плоскости точки с координатами (x_{1i} , t_i) и (x_{1j}, t_j) и соединяя их линией, получают участок переходного процесса. Для построения всего переходного процесса эта последовательность действий повторяется несколько раз. Иногда удается оценить значение Δt между двумя изображающими точками фазовой траектории, заменив дифференциалы dx_1, dx_2, dt в (7.1) соответствующими приращениями.

Переходный процесс можно построить качественно. Например, если тип особой точки – устойчивый фокус, то координата x_1 (или выходная переменная y) обращается в нуль (при $u=0$) через равные промежутки времени (Δt), которые можно оценить по параметрам системы (7.1)

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}.$$

Если фазовый портрет имеет особую точку типа «центр», то амплитуда колебаний (A) определяется абсциссой точки (x_{1i} , 0), а произведение ($A\omega$), где ω - частота колебаний, ординатой точки (0, x_{2j}), принадлежащей замкнутой линии.

3. Методические указания

В лабораторной работе исследуется поведение линейной системы, поведение которой описывается дифференциальным уравнением относительно выходной переменной вида

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = a_0 u. \tag{7.3}$$

Значения a_0 , a_1 определяются по соответствующим коэффициентам характеристического полинома $(p-p_1)(p-p_2)$, где p_1, p_2 – заданные корни характеристического уравнения, в общем случае $p_{1,2} = (\pm\alpha \pm j\beta)$. Исходные данные приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0.05	0.5	0.2	0.4	0.6	0.1	1.0	1.5	4.0	6.0
β	0.2	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0	5.0	10	12

Структурная схема системы, составленная по дифференциальному уравнению (7.3) на интегрирующих элементах, имеет вид

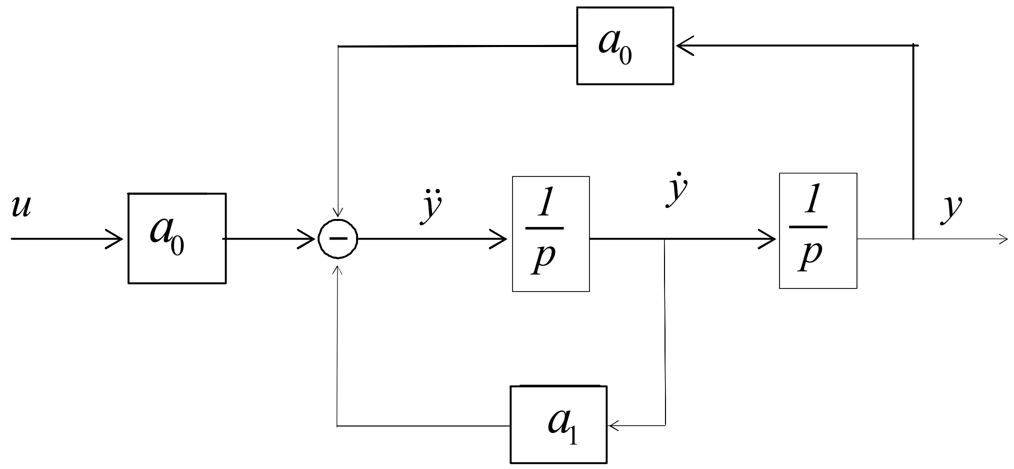

Рис.7.1. Структурная схема системы

Для построения фазового портрета выводятся сигналы y (по оси абсцисс) и $\dot{y}$ (по оси ординат). Если входное воздействие равно нулю, то начальные условия y и $\dot{y}$ задаются отличными от нуля. В случае неустойчивой системы следует выбирать начальные условия небольшими по модулю.

4. Порядок выполнения работы

4.1. Определить коэффициенты уравнения (7.3) для случая мнимых корней $p_{1,2} = \pm j\beta$, значение β взять из табл.7.1. в соответствии с номером варианта.

4.2. Определить координаты особых точек при различных значениях входного сигнала ($u = 1(t)$, $u = 0$).

4.3. Собрать модель системы по структурной схеме, приведенной на рис.7.1.

4.4. Получить вид переходного процесса при нулевых начальных условиях и $u = 1(t)$. Оценить устойчивость.

4.5. Снять фазовую траекторию при исходных данных п.4.4.

4.6. Исследовать поведение системы на фазовой плоскости при различных начальных условиях по y, $\dot{y}$ и $u = 0$. Снять фазовый портрет, определить тип особой точки.

4.7. Повторить пп.4.1, 4.3-4.6 для различных значений корней характеристического уравнения:

а) $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta;$

б) $p_{1,2} = +\alpha \pm j\beta;$

в) $p_1 = -\alpha, \qquad p_2 = -\beta;$

г) $p_1 = +\alpha, \qquad p_2 = +\beta;$

д) $p_1 = +\alpha, \qquad p_2 = -\beta.$

5. Содержание отчета

5.1. Характеристические уравнения моделей исследуемых систем с вычисленными значениями коэффициентов.

5.2. Координаты особых точек.

5.3. Графики пп. 4.4-4.7

5.4. Выводы по работы.

6. Контрольные вопросы

6.1. Как влияют параметры линейной системы на вид фазового портрета?

6.2. Какие типы особых точек существуют в линейных системах?

6.3. Как определить показатели качества процессов по виду фазовой траектории?

6.4. Как построить кривую переходного процесса по виду фазовой траектории?

6.5. Как построить фазовую траекторию аналитическим методом?