Математические основы теории систем. РГЗ-1

Темы: Матрицы. Операции над матрицами. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Преобразование Лапласа, решение линейных дифференциальных уравнений и системы линейных дифференциальных уравнений

1. Даны матрицы A, B, C, D:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Требуется вычислить следующие выражения:

1.1. $A + B, \quad B + A, \quad A + B, \quad A + B + C$

1.2. $4A - 8B, 4(4B - A), 8B - 4A$

1.3. $A + C, (C^T)^T, C + C^T$

1.4. $6C - 5C, 3C^T + 2D^T, C - 2C^T$

1.5. $5D - 3C, 5D^T - 3C^T$

1.6. $A + 0C, C - 0A, 0B, A + 1$

2. Даны вектора a, b, c, d:

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Требуется вычислить следующие выражения:

2.1. $7a - 5b, 7a^T - 5b^T$

2.2. $a - c^T, c - a^T, a + b + c$

2.3. $3(c - 4d), 3c - 12d$

2.4. $a - b + c^T - d^T, 12(b - d^T)$

2.5. $5(c - 2d), 10d - 5c$

2.6. $b + c, c - a^T, c + c^T$

3. Даны вектора и матрицы a, B, C, d:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Требуется вычислить следующие выражения:

3.1. $Ba, a^T B, aB$

3.2. $Ca, C^2 a, C^3$

3.3. $C^2, C^T C, CC^T$

3.4. $C^T a, Cd, dC$

3.5. $a^T d, a^T d^T, da, ad$

3.6. $5aa^T, 5a^T a, (a^T - d)B$

3.7. $BB^T, B^T B, BB^T B$

4. Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

4.1.

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 2 \\ 3x - 5y &= -34 \end{aligned}$$

4.2.

$$\begin{aligned} 0.4x + 1.2y &= -2.0 \\ 1.7x - 3.2y &= 8.1 \end{aligned}$$

4.3.

$$\begin{aligned} 7y + 3z &= -12 \\ 2x + 8y + z &= 0 \\ -5x + 2y - 9z &= 26 \end{aligned}$$

4.4.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 9 \\ 8y + 6z &= -6 \\ -2x + 4y - 6z &= 40 \end{aligned}$$

4.5.

$$\begin{aligned} 4x + y &= 4 \\ 5x - 3y + z &= 2 \\ -9x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

4.6.

$$\begin{aligned} 2w + 3x + y - 11z &= 1 \\ 5w - 2z + 5y - 4z = 5 &= 5 \\ w - x + 3y - 3z &= 3 \\ 3w + 4x - 7y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

5. Доказать линейную зависимость или линейную независимость векторов.

5.1. [1 0 0], [1 1 0], [1 1 1]

5.2. [7 -3 11 -6], [-56 24 -88 48]

5.3. [-1 5 0], [16 8 -3], [-64 56 9]

5.4. [1 -1 1], [1 1 -1], [-1 1 1], [0 1 0]

5.5. [2 -4], [1 9], [3 5]

5.6. [1 2 3], [0 0 0], [5 5 1]

6. Вычислить ранг матрицы.

6.1.
$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

6.2.
$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

6.3.
$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

6.4.
$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 10 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

6.5.
$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

6.6.
$$G = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Вычислить определитель матрицы.

7.1.
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 36 & 18 & 6 \\ 87 & 12 & -45 \end{bmatrix}$$

7.2.
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

7.3.
$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 10 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

7.4.
$$D = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7.5.
$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.6.
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Найти решение системы уравнений на основе правила Крамера.

8.1.
$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 37 \\ -2x + 7y &= -38 \end{aligned}$$

8.2.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 20 \\ 7x + 3y + z &= 13 \\ x + 6y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

8.3.
$$\begin{aligned} 3x + 7y + 8z &= -13 \\ 2x + 9z &= -5 \\ -4x + y - 26z &= 2 \end{aligned}$$

8.4.
$$\begin{aligned} x + y - z &= 9 \\ 8y + 6z &= -6 \\ -2x + 4y - 6z &= 40 \end{aligned}$$

8.5.
$$\begin{aligned} 4x + y &= 4 \\ 5x - 3y + z &= 2 \\ -9x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

8.6.
$$\begin{aligned} 2w + 3x + y - 11z &= 1 \\ 5w - 2z + 5y - 4z = 5 &= 5 \\ w - x + 3y - 3z &= 3 \\ 3w + 4x - 7y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

9. Найти обратную матрицу.

9.1.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

9.2.
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

9.3.
$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

9.4.
$$D = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

9.5.

$$F = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 15 & 1 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

9.6.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Найти решение заданного линейного дифференциального уравнения, или системы линейных дифференциальных уравнений на основе применения преобразования Лапласа.

10.1.

$$4y^{(1)}(t) + y(t) = 3u(t),$$
$$y(0) = 0, u(t) = 1(t)$$

10.1.

$$2y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) - 3y(t) = u(t),$$
$$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0, u(t) = 1(t)$$

10.2.

$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u(t),$$
$$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0, u(t) = \delta(t)$$

10.3.

$$2y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) - 3y(t) = u(t),$$
$$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1, u(t) \equiv 0$$

10.4.

$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u(t),$$
$$y(0) = -1, y^{(1)}(0) = 1, u(t) \equiv 0$$

10.5.

$$y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) + 5y(t) = u(t),$$
$$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = -1, u(t) \equiv 0$$

10.6.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= y \\ y^{(1)} &= -x + y \end{aligned}$$
$$x(0) = 1, y(0) = 0$$

10.7.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= y \\ y^{(1)} &= z \\ z^{(1)} &= -8y + 4z \end{aligned}$$
$$x(0) = 0, y(0) = -1, z(0) = 1$$

10.8.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 2x + y \\ y^{(1)} &= x + 3y \end{aligned}$$
$$x(0) = 1, y(0) = -1$$

10.9.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 2x + y + u(t) \\ y^{(1)} &= x + 3y \end{aligned}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 1, u(t) = \delta(t)$$