Математические основы теории систем. РГЗ-3

Темы: Норма вектора. Норма матрицы. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Разложение матрицы на произведение ортогональной и верхнетреугольной матриц. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра. Теорема Гамильтона-Кэли и её применения.

14. Вычислить абсолютную, квадратичную и бесконечную нормы следующих векторов:

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

15. Вычислить столбцовую, строчную, спектральную и евклидову нормы следующих матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 18 & -12 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 16 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

16. Проверить свойство линейной зависимости заданной системы векторов линейного пространства.

16.1.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

16.2.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

17. Сформировать ортонормированную систему векторов, используя следующие вектора:

17.1.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

17.2.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

17.3.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

18. Представить матрицу в виде разложения на произведение ортогональной и верхнетреугольной матриц.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 \\ -6 & -8 & -5 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -2 & -6 & -9 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

19. Проверить свойство положительной определенности заданной квадратичной формы. Найти преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. Вычислить положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы.

19.1.

$$f(x,x) = 1.5x_1^2 + x_1x_2 + 1.5x_2^2$$

19.2.

$$f(x,x) = 0.5x_1^2 + 5x_1x_2 + 0.5x_2^2$$

19.3.

$$f(x,x) = -2.5x_1^2 - x_1x_2 - 2.5x_2^2$$

19.4.

$$f(x,x) = \frac{1}{3}[6x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_2^2 + 5x_3^2]$$

19.5.

$$f(x,x) = \frac{1}{18}[28x_1^2 + 8x_1x_2 - 56x_1x_3 - 2x_2^2 + 64x_2x_3 + 10x_3^2]$$

20. Используя теорему Гамильтона-Кэли, найти: а) обратную матрицу A^{-1}; б) понизить степень заданного матричного полинома $P(A)$.

20.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^5 + 16A^4 + 32A^3 + 16A^2 + 4A + E$$

20.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^5 + A^3 + A + E$$

20.3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^{500}$$

20.4.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^6 + A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + E$$

21. Найти аналитическое выражение для заданной функции матричного аргумента.

21.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ Sin(A),\ Cos(A)$$

21.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ e^{At},\ e^{-At}$$

21.3.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ Sin(A),\ Cos(A),\ tg(A)$$

21.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ e^{At}$$

21.5.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ e^{At}$$

21.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},\ e^{At}$$

21.7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^k$$

k - произвольное целое число.